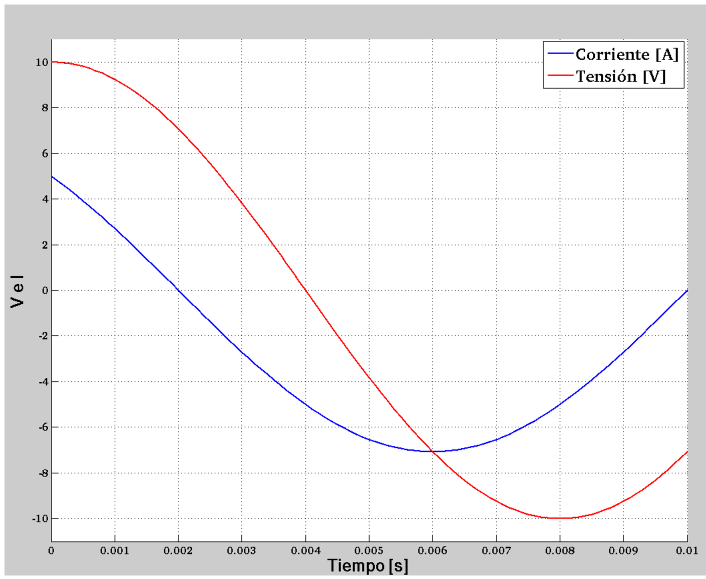
Preparaduría #4:

Análisis de Circuitos en Régimen Permanente Senoidal

Ejercicio #1:

Un circuito eléctrico de primer orden muestra el siguiente comportamiento en régimen permanente senoidal



1. **Determine los valores de R, L o C que usted considere ofrecen una respuesta como la de la figura.**
2. **El valor efectivo de la corriente**

En la figura se observa que la señal de tensión tiene un pico en $t = 0ms$, lo que indica que la fase inicial de la tensión es 0°.

A partir de la forma de onda de la señal de tensión se observa que el primer cruce por cero ocurre cuando $t = 4ms$, lo que implica que el período de la señal es $T = 16ms$, por lo que la expresión que describe la tensión en el tiempo es:

$$v_S\left(t\right) = 10cos\left(\omega t\right)\ \left[V\right]$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 125\pi\ \left[{}^{rad}/_{s}\right]$$

Para encontrar la función que describe el comportamiento de la corriente, es recomendable encontrar primero el desfasaje angular entre las dos señales.

Existe una diferencia de $\Delta t = 2ms$ entre el cruce por cero de la tensión y el cruce por cero de la corriente. Esto se traduce en un desfasaje angular de:

$$\phi = \Delta t\omega = \frac{\pi}{4}$$

También a partir del cruce por cero de la corriente se puede encontar el valor eficaz I_{RMS}

$$\begin{aligned} i\left(t=0\right) &= 5A=\sqrt{2}I_{RMS}\cos\left(\omega\left(0\right)+{}^{\pi}/_{4}\right) \\ 5A &= \sqrt{2}I_{RMS}\frac{\sqrt{2}}{2} \\ I_{RMS} &= 5A \end{aligned}$$

En vista de que la corriente adelanta a la tensión, el circuito puede ser descrito como una unión serie de una resistencia y una capacitancia. De manera que la impedancia del circuito puede ser escrita como:

$$\dot{Z}=R-jX_C=R-j\frac{1}{\omega C}=\frac{\overline{V}}{\overline{I}}$$

Los fasores de tensión y corriente pueden ser escritos como: $\overline{V}=\frac{10}{\sqrt{2}}V\measuredangle 0^{\circ}$ $\overline{I}=5A\measuredangle 45^{\circ}$

$$\dot{Z}=\frac{\frac{10}{\sqrt{2}}V\measuredangle 0^{\circ}}{5A\measuredangle 45^{\circ}}=\frac{2}{\sqrt{2}}\,\Omega\measuredangle 45^{\circ}=\frac{2}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(45^{\circ}\right)-j\sin\left(45^{\circ}\right)\right)=1-j\,\Omega$$

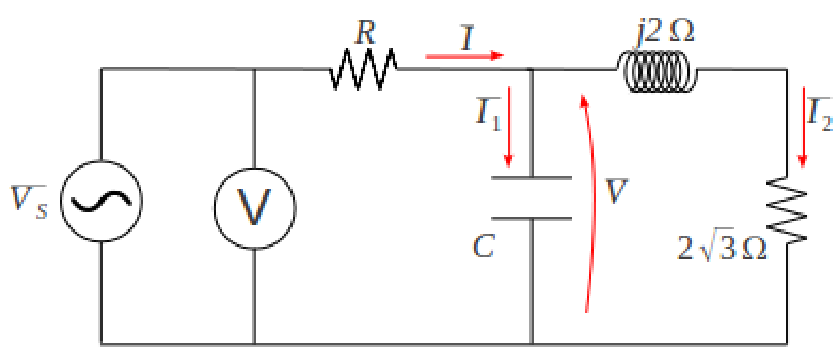
La resistencia es la directamente la parte real de la impedancia $\Re\left\{\dot{Z}\right\}=1\,\Omega$

La capacitancia se puede calcular mediante la expresión:

$$\Im\left\{\dot{Z}\right\}=\frac{1}{\omega C}\Rightarrow C=2{,}6526mF$$

Ejercicio #2:

El circuito de la figura se encuenta en RPS. La frecuencia angular es de $1000{}^{rad}/_{s}$ se sabe que $\overline{I}=5A\measuredangle 45^{\circ}$.Tome como referencia angular $\overline{V}$. Encuentre:



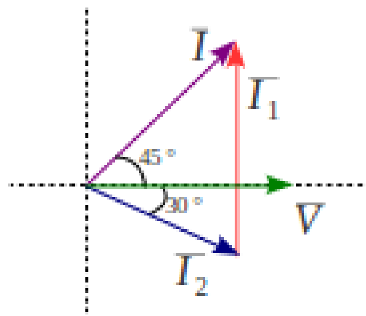
- **Intensidades $\overline{I_1}$ e $\overline{I_2}$. Dibuje el diagrama fasorial.**
- **La capacitancia C.**
- **El valor de R sabiendo que el voltímetro marca 20V.**

Como se conocen las impedancias del inductor y de la resistencias se puede hallar la impedancia equivalente de esa rama.

$$Z_1=2\sqrt{3}+j2\,\Omega=4\,\Omega\measuredangle 30^{\circ}$$

La intensidad $\overline{I_2}$ atrasa a la tensión $\overline{V}$, dado que $\dot{Z}_1$ es inductiva. Además, en vista que $\overline{V}$ es la referencia angular, el ángulo de la corriente $\measuredangle_{I_2} = 30°$ pues éste tiene que ser el argumento de $\dot{Z}_1$.

Con esta información se puede dibujar el diagrama fasorial de las corrientes.



Dado que $\overline{I_1}$ es puramente capacitiva, tiene que adelantar 90° a $\overline{V}$. Ahora planteamos la Ley de Kirchhoff para las corrientes.

$$
\begin{aligned}
\overline{I} &= \overline{I_1} + \overline{I_2} \\
5A\measuredangle 45° &= I_1\measuredangle 90° + I_2\measuredangle -30° \\
5A\left(\cos(45°) + j\sin(45°)\right) &= I_1\left(\cos(90°) + j\sin(90°)\right) + I_2\left(\cos(30°) - j\sin(30°)\right)
\end{aligned}
$$

Aquí se puede separar la parte real de la imaginaria e igualarlas en cada miembro.

$$
\begin{aligned}
5\frac{\sqrt{2}}{2} &= I_1 \cdot 0 + I_2\frac{\sqrt{3}}{2} \\
5\frac{\sqrt{2}}{2} &= I_1 - I_2 \cdot \frac{1}{2} \\
I_2 &= 4{,}0825A \\
I_1 &= 5{,}5768A
\end{aligned}
$$

A partir de $\overline{I_2}$ y $\dot{Z}_1$se puede encontrar $\overline{V}$

$$\overline{V} = \overline{I_2} \cdot \dot{Z}_1 = 16,33\,V\measuredangle 0°$$

Si se conoce V e I_1 se puede calcular la impedancia de la rama del capacitor, y por tanto el valor de la capacitancia C:

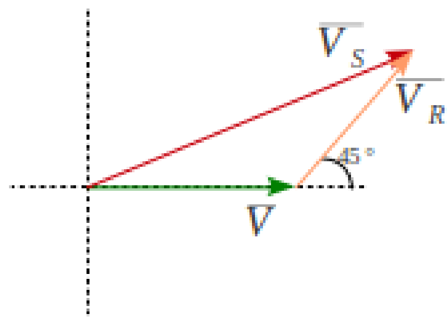
$$Z_c = \frac{V}{I} = \frac{16,33\,V\measuredangle 0°}{5,5768\,A\measuredangle 90°} = 2,9282\,\Omega\measuredangle -90°$$

$$Z_C = \frac{1}{\omega C} \Rightarrow C = \frac{1}{(1000^{rad}/s)\,(2,9282\,\Omega\measuredangle -90°)} = 341,5\mu F$$

Para encontrar el valor de R:

- Se conoce V en módulo y ángulo.
- La caída de tensión en la resistencia está en fase con I, por tanto se conoce este argumento.
- La medida del voltímetro es el módulo de la tensión de la fuente.

Con estos datos y a partir de la Ley de Kirchhoff de tensiones se dibuja el diagrama fasorial.



$$\begin{aligned}\overline{V}_S &= \overline{V} + \overline{V}_R \\ 20\measuredangle\theta &= 16,33\measuredangle 0^\circ + V_R\measuredangle 45^\circ\end{aligned}$$

Nuevamente, se separa esta expresión en parte real y parte imaginaria, y se igualan ambos miembros:

$$\begin{aligned}20\cdot\cos(\theta) &= 16,33 + V_R\cdot\cos(45^\circ) \\ 20\cdot\sin(\theta) &= V_R\cdot\sin(45^\circ)\end{aligned}$$

Estas expresiones se pueden elevar al cuadrado y se suman, a manera de eliminar θ como incógnita.

$$\begin{aligned}20^2\left(\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)\right) &= \left(16,33 + V_R\cdot\cos(45^\circ)\right)^2 + \left(V_R\cdot\sin(45^\circ)\right)^2 \\ 0 &= (-400 + 266,6689) + 23,0941V_R + V_R^2\end{aligned}$$

Este sistema de segundo orden tiene dos soluciones: $V_R^1 = -27,8769V$ y $V_R^2 = 4,7828V$. En vista de que esto corresponde con el módulo de la caída de tensión en la resistencia, es insensato considerar el valor negativo, por tanto: $\overline{V}_R = 4,7828\,V\measuredangle 45^\circ$.

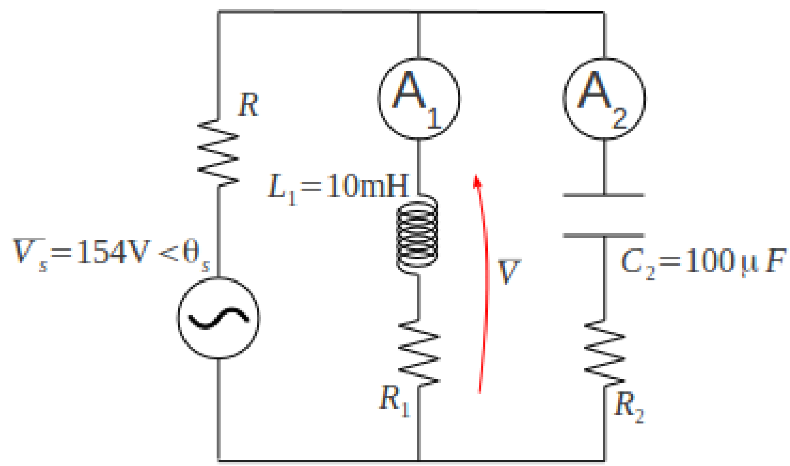
Lo que permite conocer el valor de la resistencia R.

$$R = \frac{\overline{V}_R}{\overline{I}} = \frac{4,7828\,V\measuredangle 45^\circ}{5\,A\measuredangle 45^\circ} = 0,9566\,\Omega$$

Ejercicio #3:

El circuito de la figura se encuentra en régimen sinusoidal permanente a una frecuencia de 159,1549Hz. Se conocen las lecturas de los amperímetros: $A_1 = 10A$, $A_2 = 6A$. También se sabe que

la impedancia de la rama 1 tiene un argumento de 45°. Tomando como origen de fases la tensión V, determine el valor de R, R_1, R_2, R y θ_S.



La impedancia de la rama 1 es:

$$Z_1 = R_1 + j\omega L_1 = \sqrt{R_1^2 + (\omega L)^2} \measuredangle \arctan\left(\frac{\omega L}{R_1}\right)$$

$$\omega = 2\pi f = 1000 ^{rad}/_{s}$$

Como se conoce el argumento de la impedancia de esta rama, se puede encontrar el valor de R_1.

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\left(\frac{\omega L}{R_1}\right) \Rightarrow R_1 = \frac{\omega L}{\tan\left(^{\pi}/_{4}\right)} = 10\Omega$$

Dado que la tensión $\overline{V}$ es la referencia angular, la corriente de la rama 1, atrasa en $^{\pi}/_{4}$ a la tensión, pues la impedancia de rama es de naturaleza inductiva.

$$\begin{aligned} \overline{I}_1 &= 10A\measuredangle 45° \\ \overline{V} &= \overline{I}_1 \dot{Z}_1 = 141,4214V\measuredangle 0° \end{aligned}$$

A partir de la medida del amperímetro A_2se conoce el módulo de la corriente de esta rama. Junto con la tensión se puede encontrar el módulo de la impedancia.

$$|Z_2| = \frac{|\overline{V}|}{A_2} = \frac{141,4214V}{6A} = 23,5702\Omega$$

Y conocido el valor de la capacitancia C, se puede encontrar el valor de R_2

$$|Z_2| = \sqrt{(R_2)^2 + (X_c)^2} = \sqrt{(R_2)^2 + \left(^{1}/_{\omega C}\right)^2} = 21,3437\Omega$$

El ángulo de la corriente $\overline{I}_2$ se puede encontrar a partir de la impedancia de la rama, pues la referencia angular del circuito es la tensión $\overline{V}$.

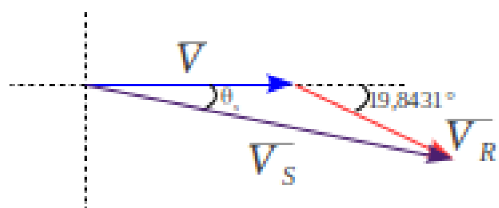
$$\begin{aligned} I_2 &= 6A\measuredangle\varphi_2 \\ \varphi_2 &= \arctan\left(\frac{1/\omega C}{R_2}\right) = 25{,}1041^\circ \end{aligned}$$

Si se utiliza la Ley de Kirchhoff de corriente se puede encontrar la corriente entregada por la fuente:

$$\begin{aligned} \overline{I} &= \overline{I}_1 + \overline{I}_2 \\ \overline{I} &= 13,298A\measuredangle - 19{,}8431^\circ \end{aligned}$$

La ecuación de malla en la fuente es:

$$\overline{V}_s = \overline{V}_R + \overline{V} = R\overline{I} + \overline{V}$$



Si se utiliza el teorema del coseno en el diagrama de fasores, se tiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} V_S^2 &= V^2 + V_R^2 - 2V \cdot V_R \cos\left(180^\circ - 19{,}8431^\circ\right) \\ 154^2 &= 141,4214^2 + \left(R \cdot 13,298\right)^2 - 2 \cdot 141,4214 \cdot 13,298 \cdot R \cdot \cos\left(160{,}1569^\circ\right) \\ 23716 &= 2 \cdot 10^4 + 176{,}8368R^2 - 3{,}7612 \cdot 10^3 \cos\left(160{,}1569^\circ\right) R \\ 0 &= 176{,}8368R^2 + 3,5378R - 3716 \end{aligned}$$

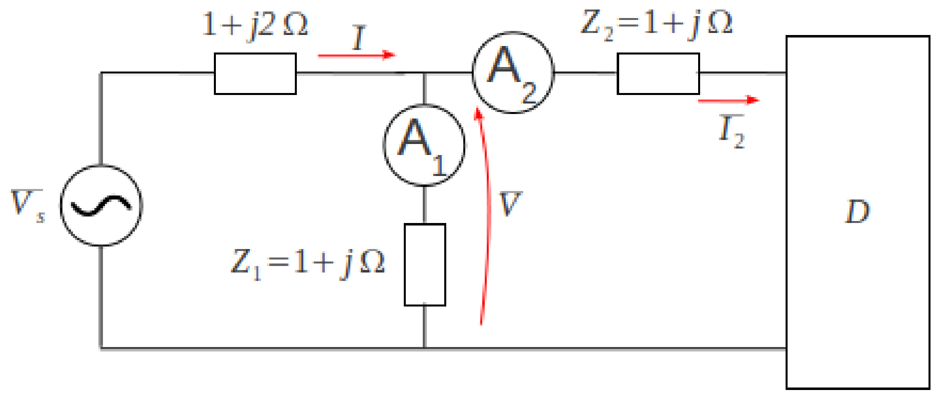
De las dos soluciones que se obtienen cuando se resuelve este sistema, la más coherente es $R = 1\Omega$.

Con este valor, se puede calcular la tensión que cae en la resistencia V_R y se puede plantear una nueva ecuación según el teorema de los cosenos:

$$\begin{aligned} V_R^2 &= V^2 + V_S^2 - 2V \cdot V_S \cdot \cos\left(\theta_S\right) \\ \cos\left(\theta_S\right) &= \frac{-V_R^2 + V^2 + V_S^2}{2V \cdot V_S} \\ \theta_S &= 1,6752^\circ \end{aligned}$$

Ejercicio #4:

El circuito se encuentra en régimen estacionario sinusoidal. Los amperímetros indican las siguientes mediciones: $A_1 = 5A,\ A_2 = 3A$



El dipolo es de carácter resistivo y se desea conocer:

- **El valor de la resistencia equivalente del dipolo D.**
- **El diagrama fasorial del sistema con I_2de referencia**
- **Valor de la intensidad $\overline{I}$ y la tensión $\overline{V}_s$**

La tension $\overline{V}$ señalada en la figura es:

$$\overline{V} = (1 + R + j) \cdot \overline{I}_2 = (1 + j) \cdot \overline{I}_1$$

Tomando los módulos:

$$\begin{aligned} 3 \cdot \sqrt{(1+R)^2 + 1} &= 5\sqrt{2} \\ R &= \sqrt{\frac{50}{9} - 1} - 1 \\ R &= 1,1344\Omega \end{aligned}$$

Si se considera $\overline{I}_2$como la referencia angular se puede encontrar la caída de tensión $\overline{V}$:

$$\begin{aligned} \overline{I}_2 &= 3A\measuredangle 0° \\ \overline{V} &= (1 + R + j) \cdot \overline{I}_2 \\ \overline{V} &= 7,0711\,V\measuredangle 25{,}1038° \end{aligned}$$

Ahora se puede calcular la corriente $\overline{I}_1$:

$$\overline{I}_1 = \frac{\overline{V}}{\dot{Z}_1} = \frac{7,0711\,V\measuredangle 25{,}1038°}{(1+j)\,\Omega} = 5\,A\measuredangle - 19,8962$$

Conocidas las dos corrientes $\overline{I}_1$ e $\overline{I}_2$ se puede calcular la corriente $\overline{I}$ que entrega la fuente, y ya con ella se puede encontrar la tensión en la fuente por Ley de Kirchhoff de tensiones.

$$
\begin{aligned}
\overline{I} &= I_1 + I_2 \\
\overline{I} &= 5\,A\measuredangle -19,8962 + 3\,A\measuredangle 0^\circ \\
\overline{I} &= 7,8873\measuredangle -12,4588^\circ
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{V}_s &= (1+j2)\cdot \overline{I} + \overline{V} \\
\overline{V}_s &= 17,6366\measuredangle 50,9761^\circ + 7,0711\,V\measuredangle 25{,}1038^\circ \\
\overline{V}_s &= 24,1966\measuredangle 43,6497^\circ
\end{aligned}
$$